Національна академія наук України
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова

ВЕРЛАНЬ Дмитро Анатолійович

УДК 519.6 : 004.942

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ НА ОСНОВІ РОЗЩЕПЛЕННЯ ЯДЕР

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник	доктор фізико-математичних наук, професор **Семенов Володимир Вікторович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, професор кафедри обчислювальної математики
Офіційні опоненти	доктор технічних наук, професор **Малачівський Петро Стефанович,** Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, провідний науковий співробітник відділу математичних методів обчислювального експерименту
	доктор технічних наук, професор **Засядько Аліна Анатоліївна,** Черкаський навчально-науковий інститут ДВНЗ «Університет банківської справи», професор кафедри вищої математики та інформаційних технологій

Захист відбудеться « 5 » липня 2016 р. о 14-00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.185.01 Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України за адресою: 03164, м. Київ, вул. Генерала Наумова, 15.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України за адресою: 03164, м. Київ, вул. Генерала Наумова, 15.

Автореферат розісланий « 2 » червня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.185.01 В.В. Душеба

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Підвищення складності задач динаміки технічних і особливо комп'ютерно-інтегрованих систем, розширення класу досліджуваних динамічних об'єктів обумовлюють необхідність подальшого розвитку та удосконалення методів математичного моделювання в задачах динаміки, розробки нових ефективних методів і засобів комп'ютерної реалізації математичних моделей реальних технічних об'єктів. При цьому вирішуються такі проблеми як забезпечення адекватності математичних моделей і точності їх чисельної реалізації, зменшення розмірності обчислювальних задач, розширення класу алгоритмів моделювання, створення програмних засобів, що відповідають вимогам розв'язання задач оперативної обробки сигналів і дослідницьких задач.

Прагнення забезпечити високу якість комп'ютерних засобів і врахувати обмеження ресурсів призводить до необхідності досліджувати можливості застосування різних видів математичних описів в якості моделей динамічних об'єктів. При цьому не повністю вирішеною залишається проблема дослідження і використання можливостей непараметричних динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь і операторів, які володіють суттєвими позитивними рисами, а також особливостями як при описі широкого класу процесів, так і при комп'ютерній реалізації.

До параметричних динамічних моделей відносяться диференціальні рівняння (звичайні і в частинних похідних), на розв'язування яких насамперед орієнтовані серійні програмні продукти, призначені для дослідження динамічних об'єктів. Параметри диференціальних рівнянь прямо або побічно визначаються заданими параметрами об'єкта. Клас непараметричних динамічних моделей складають різні види інтегральних рівнянь та їх систем, властивості яких визначаються структурою рівнянь і ядрами, що входять в інтегральні оператори. Ядра операторів у випадку скалярних інтегральних динамічних моделей являють собою функції двох змінних, сформовані за заданими динамічними характеристиками об'єкта. Крім зазначених параметричних і непараметричних динамічних моделей існують також моделі змішаного типу, а саме динамічні моделі у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, в яких поєднані властивості параметричних і непараметричних моделей.

Одним із важливих напрямків розвитку інтегральних методів математичного і комп'ютерного моделювання є створення та розвиток чисельних методів, алгоритмів та програмних засобів розв'язання відповідних видів інтегральних рівнянь, до яких відносяться рівняння типу Вольтерри II і I роду та рівняння Фредгольма II і I роду. Розв'язування інтегральних рівнянь у багатьох випадках пов'язане з великими розмірами алгебраїчних систем, що виникають при дискретизації моделей (для рівнянь Фредгольма), а також з накопиченням кількості операцій на кожному кроці обчислювального процесу (для рівнянь Вольтерри). Подоланню зазначених труднощів суттєво сприяє використання методу вироджених ядер (методу розщеплених ядер), який дозволяє побудувати економні обчислювальні схеми для отримання результатів за рахунок заміни обчислювальних операцій з функціями двох змінних операціями з функціями однієї змінної. Для ефективної реалізації даного підходу метод вироджених ядер повинен мати у своєму складі алгоритм апроксимації функцій двох змінних комбінацією функцій однієї змінної, складність якої повинна бути мінімально можливою, що також є оптимізаційною задачею, яка підлягає вирішенню.

Таким чином, можна констатувати актуальність науково-технічної задачі розвитку методів і засобів комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів на основі ефективного застосування непараметричних динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь і операторів з удосконаленням та застосуванням методу вироджених ядер.

У розвиток теоретичних положень і прикладних питань в галузі чисельних методів розв’язання і застосування інтегральних рівнянь (стосовно задач динаміки) значні результати внесені працями Баляша Ю.Г., Біленка В.І, Білецького В., Брикмана М.С, Булатова М.В, Вакал Л.П, Васильєва В.В., Верланя А.Ф, Глушкова В.М, Головача Г.П, Горбаня О.М, Дзядика В. К., Дячука О. А., Задираки В.К., Засядько А.А., Іванова В.В, Калайди О.Ф., Колтунова М.А., Конета І.М., Лучки А. Ю., Павленка В.Д., Положаєнка С.А., Положія Г.І., Пухова Г.Є., Ржаніцина А.Р, Розенвассера Є.Н., Сізікова В.С., Соколова Ю.Д., Тихонова А.М., Федорчука В.А., Baker C.T.H., Bellman R., Blom J.G., Brunner H., Ford N.J., Gripenberg G., Linz P., Porter D. та ін.

Розвитку методів наближення функцій двох і більше змінних, а також близьких до даної задачі оптимізаційних методів і алгоритмів присвячені праці Бабаєва М.-Б.А., Байкова М.С., Бутирського Є.Ю., Войтовича М.М., Горбаня А.Н., Каленчук-Порханової А.О., Клименка В.Т., Колмогорова А.М., Кондратьєва В.П., Корнійчука М.П., Крейна М.Г., Малачівського П.С., Малоземова В.М., Петрака Л.В., Поспєлова В.В., Сазонової Л.В., Семенова В.В., Хнаєва О.В., Шабозова М.Ш., Шура-Бури М.Р. та ін.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження проводилось на кафедрі обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та в рамках науково-дослідних робіт: «Математичне та комп’ютерне забезпечення розробок випробувальних стендів силових установок енергетичного і транспортного призначення» (№ держреєстрації 0110U003649) та «Математичні методи і комп’ютерні засоби модельної підтримки розробок систем вимірювання і керування випробувальних стендів силових установок енергетичного і транспортного призначення» (№ держреєстрації 0109U008340).

Мета та завдання дослідження. Метою роботи є розвиток методів математичного і комп’ютерного моделювання динамічних об’єктів на основі непараметричних динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри та Фредгольма і їх чисельної реалізації шляхом створення і застосування ефективних алгоритмів розщеплення ядер.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі дослідження:

1. Аналіз і систематизація властивостей непараметричних динамічних моделей у вигляді інтегральних операторів і рівнянь типу Вольтерри і Фредгольма,

визначення особливостей їх формування і застосування в прикладних задачах, аналіз принципів побудови притаманних їм методів розв’язання, обґрунтування обраного підходу до побудови ефективних алгоритмів чисельної комп’ютерної реалізації даного класу моделей.

2. Розробка комп’ютерно-орієнтованих алгоритмів наближення функцій двох змінних, тобто ядер інтегральних операторів і рівнянь, у вигляді білінійних рядів (сум добутків функції однієї змінної) на основі методу розщеплення з мінімізацією кількості членів ряду для підвищення ефективності методу вироджених ядер.

3. Розробка набору алгоритмів методу вироджених ядер для чисельного розв’язування задач аналізу динамічних об’єктів (прямі задачі), поданих лінійними і нелінійними інтегральними рівняннями Вольтерри II роду та їх системами, а також обернених задач відновлення вхідних впливів, що описуються інтегральними рівняннями Вольтера I роду; проведення обчислювальних експериментів.

4. Розробка набору алгоритмів методу вироджених ядер для чисельного розв’язування задач динаміки, що описуються інтегральними рівняннями Фредгольма II і I роду, їх системами та відповідними нелінійними рівняннями; розробка підходу до застосування методу при розв’язанні інтегро-диференціальних рівнянь; побудова алгоритмів оперативного оцінювання похибок чисельних розв’язків; дослідження можливостей резольвентного методу; проведення обчислювальних експериментів.

5. Створення комплексу програм для чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей на основі методу вироджених ядер; оцінка ефективності програмних засобів; розв’язання тестових та практичних задач.

Тема дисертації, сформульовані задачі досліджень і розробок, а також отримані результати охоплюють за призначенням важливий клас фізико-технічних та комп’ютерно-інтегрованих об’єктів, повністю відповідають формулі спеціальності 01.05.02 (математичне моделювання та обчислювальні методи) і безпосередньо відносяться до п.п. 1, 2, 3, 4 паспорту спеціальності.

Об’єктом дослідження є процеси моделювання динамічних об’єктів.

Предметом дослідження є методи та засоби математичного та комп’ютерного моделювання задач динаміки шляхом чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей за методом розщеплення ядра.

Методи дослідження. Робота виконана з використанням методів теорії інтегральних рівнянь (при формуванні математичних моделей); методів теорії наближення функцій двох змінних (при розробці алгоритмів апроксимації ядер інтегральних рівнянь); методів еквівалентного та апроксимаційного перетворення рівнянь динаміки (при побудові альтернативних форм моделей динамічного об’єкту); елементів теорії чисельних методів розв’язання інтегральних рівнянь; способів організації програмних засобів методами програмної інженерії (при створенні чисельних алгоритмів і програмних засобів та при проведенні обчислювальних експериментів по дослідженню алгоритмів моделювання).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

1. Розвинуто методи математичного моделювання динамічних об'єктів шляхом формування і дослідження непараметричних моделей у вигляді основних видів лінійних і нелінійних скалярних інтегральних операторів і рівнянь із змінними і постійними межами інтегрування.

2. Вперше запропоновано і досліджено реалізацію методу розщеплення для апроксимації функцій двох змінних, який, на відміну від інших (поліноміальних) методів, дозволяє отримати апроксимуючий білінійний ряд без попереднього вибору відомої системи координатних функцій, а саме шляхом поточкового визначення їх в процесі апроксимації, і реалізується за допомогою 3-х видів оптимізаційних алгоритмів – варіаційного, ітераційно-варіаційного та градієнтного; метод забезпечує високу економічність апроксимуючого виразу.

3. Набув розвитку метод вироджених ядер для обчислення інтегральних операторів і розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма шляхом апроксимації ядер на основі методу розщеплення з отриманням економічних білінійних наближень з заданими показниками точності та орієнтацією на регулярне використання в програмних пакетах.

4. Розроблено продуктивні рекурентні алгоритми методу вироджених ядер для розв'язання інтегральних рівнянь типу Вольтери II і I роду, які забезпечують високу швидкодію процесу обчислень та створюють можливість отримання результатів у реальному часі; отримані алгоритми методу вироджених ядер для розв'язання інтегральних рівнянь забезпечують суттєве зменшення розмірності супутніх алгебраїчних систем, що входять в обчислювальний процес.

5. З використанням методу розщеплення ядер вперше створені квадратурні алгоритми розв'язання лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри і Фредгольма II роду на основі обчислення і застосування резольвенти, що забезпечує отримання явних інтегральних моделей динамічних об'єктів, які подаються і реалізуються у вигляді сукупності числових масивів, зв'язаних між собою відповідними обчислювальними операціями.

Практичне значення отриманих результатів. Запропоновані обчислювальні алгоритми наближення ядер інтегральних операторів та рівнянь при реалізації методу вироджених ядер, а також розроблений комплекс програм, що реалізують вказані алгоритми, дозволяють ефективно розв'язувати широкий клас задач моделювання динамічних об'єктів, які описуються основними типами інтегральних рівнянь, що підтверджується розв'язуванням численних тестових та низки практичних задач; створені методи та засоби можуть бути ефективно використані при моделюванні динамічних об'єктів з зосередженими і розподіленими параметрами при проектуванні і дослідженні широкого класу систем керування та спостереження; розроблені методи і засоби отримали впровадження в технічних розробках та навчальному процесі.

Особистий внесок здобувача. Всі основні положення й результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримано автором самостійно. У працях опублікованих із співавторами здобувачеві належать наступні результати: [5] – основні аналітичні викладки отримання оцінок точності алгоритмів розв'язання інтегральних рівнянь; [7] – розробка обчислювальних схем для швидкодіючих обчислень; [9] – квадратурні алгоритми розв'язання нелінійних рівнянь на основі комбінацій квадратурних формул з підвищеною точністю; [10] – розробка програми розв'язання регуляризованої системи інтегральних рівнянь; [11] – підготовка розділів посібника з описом методу вироджених ядер; [12] – опис методу формування інтегрального рівняння типу Фредгольма для нелінійного об'єкта; [13] – дослідження алгоритмів; [14] – розробка алгоритму апроксимації ядра; [20] – виконання аналітичних перетворень зведення задачі до інтегрального рівняння.

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на 8 міжнародних, всеукраїнських та регіональних конференціях: Международная научно-практическая конференция "Инновация-2009"(22-24 октября, Ташкент); XXIX науково-технічна конференція «Моделювання» (12-13 січня 2010 р. м. Київ); Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the International Scientific Conference of Students and Young Scientists(21-25 February 2011,Kyiv); XXX науково-технічна конференція «Моделювання» (12–13 січня 2011 р., м. Київ), XXXI науково-технічна конференція «Моделювання» (11–12 січня 2012 р., м. Київ); XXXII науково-технічна конференція «Моделювання» молодих вчених та спеціалістів (9–10 січня 2013 р., м. Київ); VI міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (4–5 квітня 2014 р., м. Кам'янець-Подільський); Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів" (19 – 22 лютого 2015р. Рівне).

Публікації. Основні положення і результати дисертаційного дослідження опубліковані в 21 науковій роботі, з яких: 12 наукових статей надруковані у виданнях, що входять до переліку фахових видань, одна з яких входить до міжнародних науко-метричних баз (Index Copernicus), одна – до бази даних американського Інституту наукової інформатики Томсона (ISI) та до реферативної бази даних Scopus; 1 навчальний посібник; 8 робіт опубліковані в матеріалах всеукраїнських та міжнародних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел (157 найменувань) та 4-х додатків. Загальний обсяг дисертації складає 216 сторінок, в тому числі 161 сторінка основного тексту, включаючи 27 таблиць та 54 рисунки; обсяг додатків складає 23 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи, актуальність проблеми, мету та завдання дослідження, відомості про зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, відзначені наукова новизна й практична цінність отриманих результатів, особистий внесок здобувача в роботах у співавторстві, відомості про апробацію результатів роботи.

Перший розділ присвячений аналізу стану проблеми математичного і комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів та сучасних вимог до відповідних динамічних моделей і засобів їх чисельної реалізації, а також властивостей інтегральних динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри і Фредгольма II і I роду та чисельних методів їх розв'язання.

Клас непараметричних динамічних моделей складають різні види інтегральних рівнянь та їх систем, властивості яких визначаються структурою рівнянь і ядрами, що входять в інтегральні оператори і являють собою функції двох змінних, сформовані за заданими динамічними характеристиками об'єкта. До інтегральних рівнянь відносяться такі функціональні рівняння, які містять інтегральне перетворення над шуканої функцією. У досить загальному випадку лінійні інтегральні рівняння можуть бути представлені у вигляді

$$g(x)y(x) - \int_{\Omega} K(x,s)y(s)\,ds = f(x), x \in Q, \tag{1}$$

де $K(x,s)$ – ядро, $f(x)$ – права частина рівняння і $y(s)$ – шукана функція з областю визначення Ω, змінною в разі рівняння

$$y(x) - \int_{a}^{x} K(x,s)y(s)\,ds = f(x), x \in [a,b],$$

або постійною для рівняння Фредгольма, одновимірного або багатовимірного. Функції $g(x)$, $K(x,s)$, $f(x)$ і області Q та Ω покладаються заданими.

При $g(x) \equiv 0$ рівняння (1) є рівнянням I роду, що записується у вигляді:

$$\int_{\Omega} K(x,s)y(s)\,ds = f(x), x \in Q; \tag{2}$$

в цьому випадку для рівняння Вольтерри $\Omega = Q$, а для рівняння Фредгольма, взагалі кажучи, $\Omega \neq Q$. Якщо ж $g(x) \neq 0$, то рівняння (1) допускає ділення на $g(x)$, тобто в цьому випадку розглядається рівняння

$$y(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x,s)y(s)\,ds = f(x), x \in Q, \tag{3}$$

яке є рівнянням Фредгольма або Вольтерри II роду.

Задачі аналізу об'єктів, охоплених зворотними зв'язками, описуються інтегральними рівняннями другого роду (3), причому реакції систем на довільні зовнішні впливи являють собою шукані функції рівнянь із змінними межами інтегрування, а періодичні процеси описуються рівняннями з постійними межами інтегрування, рівними періоду. Розв'язування рівнянь другого роду в принципі представляє коректну задачу. Задачі відновлення зовнішніх впливів, визначення вагових функцій, більш загальні задачі ідентифікації, інтерпретації результатів спостережень і експериментів призводять до рівнянь першого роду, які володіють властивостями некоректності.

Згідно із структурним підходом математична модель об'єкта формується за його структурою, зокрема, динамічний об'єкт (рис. 1) з оберненим зв'язком, який містить одну нелінійну ланку з характеристикою $y = F(x)$, а також лінійну частину, описується рівнянням Вольтери II роду $x(t)=\int\limits_0^t g(t-\tau)y(\tau)d\tau+f(t)$, де $g(t-\tau)$ – вагова функція, f – зовнішній вплив. Інтегральне рівняння Фредгольма II роду щодо періодичного режиму в об’єкті має вигляд $x(t)=\int\limits_0^T G(t,\tau)F\left[x(\tau)\right]d\tau+f(t)$, де ядро $G(t,\tau)$ має вигляд функції Гріна для крайової задачі.

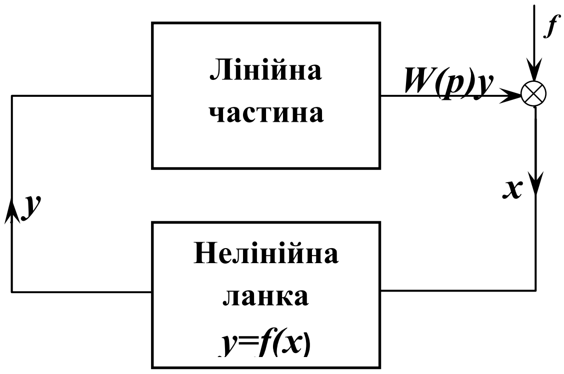

Рис. 1. Структурна схема об’єкту з однією нелінійністю

За принципом побудови розрізняють дві основні групи методів розв’язування інтегральних рівнянь – прямі та ітераційні. Прямі методи полягають у зведенні рівнянь, які розв’язуються, до більш простих шляхом апроксимації операторів. Серед апроксимаційних методів може бути виділений клас проекційних методів, заснованих на апроксимації розв’язків. Прямі методи розв'язання інтегральних рівнянь полягають в отриманні та розв’язанні систем алгебраїчних, або в загальному випадку, скінченних нелінійних рівнянь, що найкращим чином відповідає сучасним вимогам до комп’ютерних засобів моделювання динамічних об’єктів.

Застосування методу вироджених ядер, призначеного апріорі на розв’язування лінійних рівнянь Фредгольма II роду, вимагає проведення додаткових досліджень для охоплення різноманітних видів рівнянь відповідно до різних постановок задач динаміки, зокрема, нелінійних інтегральних рівнянь, рівнянь вольтерівського типу, систем рівнянь в прямих задачах моделювання (задач аналізу), так і в обернених задачах (відновлення сигналів). У відповідності до обраного підходу розглянемо принцип застосування методу вироджених ядер до нелінійного рівняння фредгольмового типу, а саме до рівнянь Гамерштейна

$$y(x)=\int\limits_a^b Q(x,t)\Phi(t,y(t))dt. \tag{4}$$

Нехай $Q(x,t)$ – вироджене ядро, тобто $Q(x,t)=\sum\limits_{k=1}^m g_k(x)h_k(t)$. У цьому випадку рівняння (4) приймає вигляд

$$y(x)=\sum_{k=1}^m g_k(x)\int\limits_a^b h_k(t)\Phi(t,y(t))dt. \tag{5}$$

Покладемо

$$A_k = \int_a^b h_k(t)\Phi(t, y(t))dt,\ k = 1, 2, ..., m, \tag{6}$$

де A_k – поки невідомі постійні. Тоді в силу (5) будемо мати

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k g_k(x). \tag{7}$$

Підставляючи в рівність (6) вираз (7) для $y(x)$, отримаємо в загальному випадку m трансцендентних рівнянь виду

$$A_k = \Psi_k(A_1, A_2, ..., A_m),\ k = 1, 2, ..., m, \tag{8}$$

що містять m невідомих величин $A_1, A_2, ..., A_m$.

У разі, коли $\Phi(t, y)$ многочлен відносно y, тобто

$$\Phi(t, y) = p_o(t) + p_1(t)y + ... + p_n(t)y^n, \tag{9}$$

де $p_o(t), p_1(t), ..., p_n(t)$ є, наприклад, безперервні функції t на відрізку $[a,b]$, система (9) перетворюється в систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $A_1, A_2, ..., A_m$.

Даний метод найбільш відповідає поставленій задачі удосконалення методів і засобів моделювання динамічних об'єктів на основі інтегральних рівнянь. Для цього необхідно розв'язувати задачу апроксимації ядра з приведенням його до виродженого вигляду з мінімально можливою складністю.

Другий розділ присвячений аналізу існуючих підходів до розв'язання проблеми багатовимірної апроксимації і властивостей деяких поширених методів наближення функцій двох змінних; в розділі оцінюється поліноміальний підхід до вирішення задачі, пропонується і досліджується метод і відповідні конкретні алгоритми розщеплення ядер інтегральних рівнянь, які призначені для модифікації та підвищення ефективності використання методу вироджених ядер при реалізації інтегральних динамічних моделей різних видів.

Аналіз відомих методів апроксимації аналітичного характеру, що можуть бути застосовані в методі вироджених ядер, зокрема ряд Тейлора (і подвійний ряд Тейлора), тригонометричний поліном, інтерполяційні поліноми Ньютона та ін., свідчать про їх певні обмежені можливості (аналітичні утруднення, обчислювальні складності, витрати часу і ресурсів, особливо у випадку необхідності обробки вихідних експериментальних даних). З іншого боку, чисто дискретизаційний спосіб Бетмана пов'язаний з великою кількістю обчислювальних операцій. Відмічені труднощі можуть пояснити той факт, що вказані методи не стали основою побудови комп'ютерних засобів реалізації методу вироджених ядер.

Враховуючи виконаний аналіз принципів і операцій поліноміальної апроксимації функцій двох змінних, запропоновано метод і алгоритми наближення ядер інтегральних операторів без попереднього вибору і наступного використання апроксимуючого поліному не по одній із змінних. Це дозволяє цю пропозицію називати більш близьким до її суті терміном – апроксимація шляхом розщеплення.

Будемо розглядати задачу наближення функції двох змінних у наступному вигляді. Нехай задана інтегрована в квадраті ($a \le x \le b$, $a \le s \le b$) функція $K(x,s)$. Необхідно апроксимувати її сумою добутків функцій від однієї змінної $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x)\beta_j(s)$, виходячи з умови мінімуму квадратичного функціоналу

$$\Phi = \int_a^b \int_a^b \left[K(x,s) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\beta_i(s) \right]^2 dxds\,, \tag{16}$$

тобто, ми повинні отримати наближення у вигляді

$$K(x,s) \cong \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\beta_i(s)\,, \tag{17}$$

де функції $\alpha_i(x)$ і $\beta_i(s)$ - невідомі і підлягають визначенню.

Така постановка задачі наближення принципово відрізняється від задачі поліноміального наближення, оскільки апріорно не передбачає вибору і застосування якихось базових фунцій для побудови апроксимаційного виразу. Передбачається суто числове поточкове визначення одновимірних функцій, сума доданків і формує відповідне наближення із заданою точністю. Можна припустити, що реалізація такого підходу може привести до отримання апроксимуючого білінійного ряду мінімальної складності стосовно до даної конкретної вихідної функції, причому в зв'язку з не традиційною постановкою задачі доцільно провести дослідження відносно тих чи інших оптимізуючих алгоритмів, а також відносно властивостей результатів, які будуть отримані.

Варіаційний алгоритм. Для побудови апроксимуючого ряду з метою апроксимації ядра визначимо m функцій $\beta_i^{(0)}(s)$, $(i = \overline{1,m})$, які представляють початкові наближення функцій. Початкове наближення для функцій $\alpha_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ обчислюється з умов мінімуму функціонала

$$\Phi_{jt}^{(0)} = \int_a^b \left[K(x,s_j) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij}^{(0)}\beta_{ij}^{(0)} \right]^2 ds,\ j = \overline{1,N}, \tag{18}$$

де $\beta_{ij}^{(0)} = \beta_i^{(0)}(t_j)$, $\alpha_{ij}^{(0)} = \alpha_i^{(0)}(s_j)$.

Процес апроксимації полягає в побудові та мінімізації функціоналів

$$\Phi_{jx}^{(1)} = \int_a^b \left[K(x,s_j) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij}\beta_i^{(1)}(s) \right]^2 ds, \tag{19}$$

$$\Phi_{js}^{(1)} = \int_a^b \left[K(x_j,s) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}(x)\beta_{ij} \right]^2 dx. \tag{20}$$

Після чого будуємо і мінімізуємо функціонали $\Phi_{jx}^{(2)}$, $\Phi_{jx}^{(3)},...,\Phi_{jx}^{(k)}$, $\Phi_{js}^{(2)}$, $\Phi_{js}^{(3)},...,\Phi_{js}^{(k)}$ до тих пір, поки на деякому k-му наближенні $\alpha_i^{(k)}(s)$ та $\beta_i^{(k)}(t)$ не буде досягнута можлива для даного N точність апроксимації.

Базовий ітераційно-варіаційний алгоритм. В рамках оптимізаційного підходу для представлення функції двох змінних можна використовувати наступний ітераційно-варіаційний метод. З умови

$$\int_a^b \left[K(x,s)-\alpha_i(s)\beta_i(s)\right]^2 dx = 0 \qquad (21)$$

шляхом перетворень отримуємо розрахункові вирази

$$\beta_i(s)=\frac{\int_a^b K(x,s)\alpha_i(x)dx}{\int_a^b \alpha_i^2(x)dx} \text{ та } \alpha_i(s)=\frac{\int_a^b K(x,s)\beta_i(x)dx}{\int_a^b \beta_i^2(x)dx}.$$

Схема методу полягає в тому, що почергово знаходяться доданки суми, що апроксимує функцію $K(x,s)$. Тобто, спочатку знаходиться один доданок $\alpha_1(x)\beta_1(s)$. Цей перший доданок формуємо наступним чином: задаємо $\beta_1^{(0)}(s)$ - початкове наближення функції $\beta_1(s)$ та, знаючи його, знаходимо $\alpha_1^{(0)}(x)$ - початкове наближення $\alpha_1(x)$. Потім розрахунки повторюються до досягнення необхідної точності, тобто наближуємо $\alpha_{i+1}(x)\beta_{i+1}(s)$ до $K_{i+1}(x,s)$. Продовжуємо цей ітераційно-варіаційний процес до поки не буде виконана умова

$$\int_a^b\int_a^b \left[K(x,s)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)\right]^2 dxds \le \varepsilon_{apr}. \qquad (22)$$

де ε_{apr} - задана точність апроксимації. Таким чином, отримуємо ряд $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)$, який із заданою точністю апроксимує вихідну функцію $K(x,s)$.

Градієнтний алгоритм. З метою прискорення процесу апроксимації для гладких функцій $K\left(x,s\right)$ доцільно розглянути функціонал, що враховує швидкісні зміни градієнта функції $K\left(x,s\right)$ за змінними x та s В такому випадку критерій оптимальності можливо записати як:

$$\Phi_g=\int_a^b\int_a^b \left[K(x,s)-\sum_{i=1}^{l}a_i(x)\beta_i(s)\right]^2 dxds + n\int_a^b\int_a^b \left[K^{'}(x,s)-\sum_{i=1}^{l}a_i^{'}(x)\beta_i(s)\right]^2 dxds +$$
$$+m\int_a^b\int_a^b \left[K^{'}(x,s)-\sum_{i=1}^{l}a_i(x)\beta_i^{'}(s)\right]^2 dxds \to \min, \qquad (23)$$

де n і m вагові коефіцієнти при доданках, що враховують перші похідні по x і s відповідно. Значення n і m вибираються (визначаються) чи на основі апріорних даних про функції $K\left(x,s\right)$, або в процесі подальших обчислювальних експериментів.

Цей підхід дозволяє отримати розрахункові вирази для $i=\overline{0,l}$:

$$\alpha_i^{(j)}(x)=\frac{\int_a^b K_i(x,s)\beta_i^{(j)}(s)+mK_x'(x,s)\beta_i^{(j)'}(s)ds}{\int_a^b\left(\beta_i^{(j)}(s)+\beta_i^{(j)'}(s)\right)^2 ds},\tag{24}$$

$$\beta_i^{(j)}(s)=\frac{\int_a^b K_i(x,s)\alpha_i^{(j)}(x)+nK_s'(x,s)\alpha_i^{(j)'}(x)dx}{\int_a^b\left(\alpha_i^{(j)}(x)+\alpha_i^{(j)'}(x)\right)^2 dx},\tag{25}$$

які завершують побудову нового алгоритму, який дає можливість прискорити обчислювальний процес і зменшити кількість доданків апроксимуючого ряду.

Розглянуті алгоритми досліджені шляхом обчислювальних експериментів, що засвідчило їх високу ефективність. Зокрема, ці результати відображає наступний приклад.

Приклад. Апроксимується коливальна функція $K(x,s)=\sin(xs)$ на відрізку $[0,\pi]$ з кроком $h=0.01$, при умові, що максимальне відхилення $\varepsilon=\left|K(x,s)-\tilde{K}(x,s)\right|<10^{-3}$. Отримані результати порівнювалися з результатами інших методів поліноміального типу, що відображено в таблиці 1.

Таблиця 1.

Порівняння похибок апроксимації функції $K(x,s)=\sin xs$ різними методами

№п/п	Метод апроксимації	Кількість членів апроксимуючого ряду	Похибка апроксимації
1.	**Поліноміальний метод найменших квадратів**	**25**	**$11.9\cdot10^{-4}$**
2.	**Поліноміальний метод найменших квадратів у нормі простору L_1**	**25**	**$17.67\cdot10^{-4}$**
3.	**Поліноміальний метод найменших квадратів (рівномірна апроксимація)**	**25**	**$8.6\cdot10^{-4}$**
4.	**Поліноміальний метод комбінованого наближення (в нормі простору C за змінною x і в нормі простору L_1 за аргументом s).**	**25**	**$20.7\cdot10^{-4}$**
5.	**Градієнтний метод розщеплення**	**4**	**$0.078\cdot10^{-4}$**

Можливості розроблених алгоритмів ілюструються також на більш складних функціях, зокрема на наступному прикладі.

Приклад. Апроксимується не всюди диференційована функція

$$K(x,s)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3},\\ 0,\ \text{при}\ \frac{1}{3}>x\cup x<\frac{2}{3}.\end{cases}$$

В даному випадку ітераційно-варіаційний алгоритм апроксимації дозволяє отримати результат (рис. 2), що повторює вихідну функцію з максимальною для комп’ютера точністю у вигляді добутку двох одномірних функцій, що також свідчить про позитивні якісні властивості приведеного алгоритму апроксимації у випадку наближення функцій, які не відносяться до неперервних.

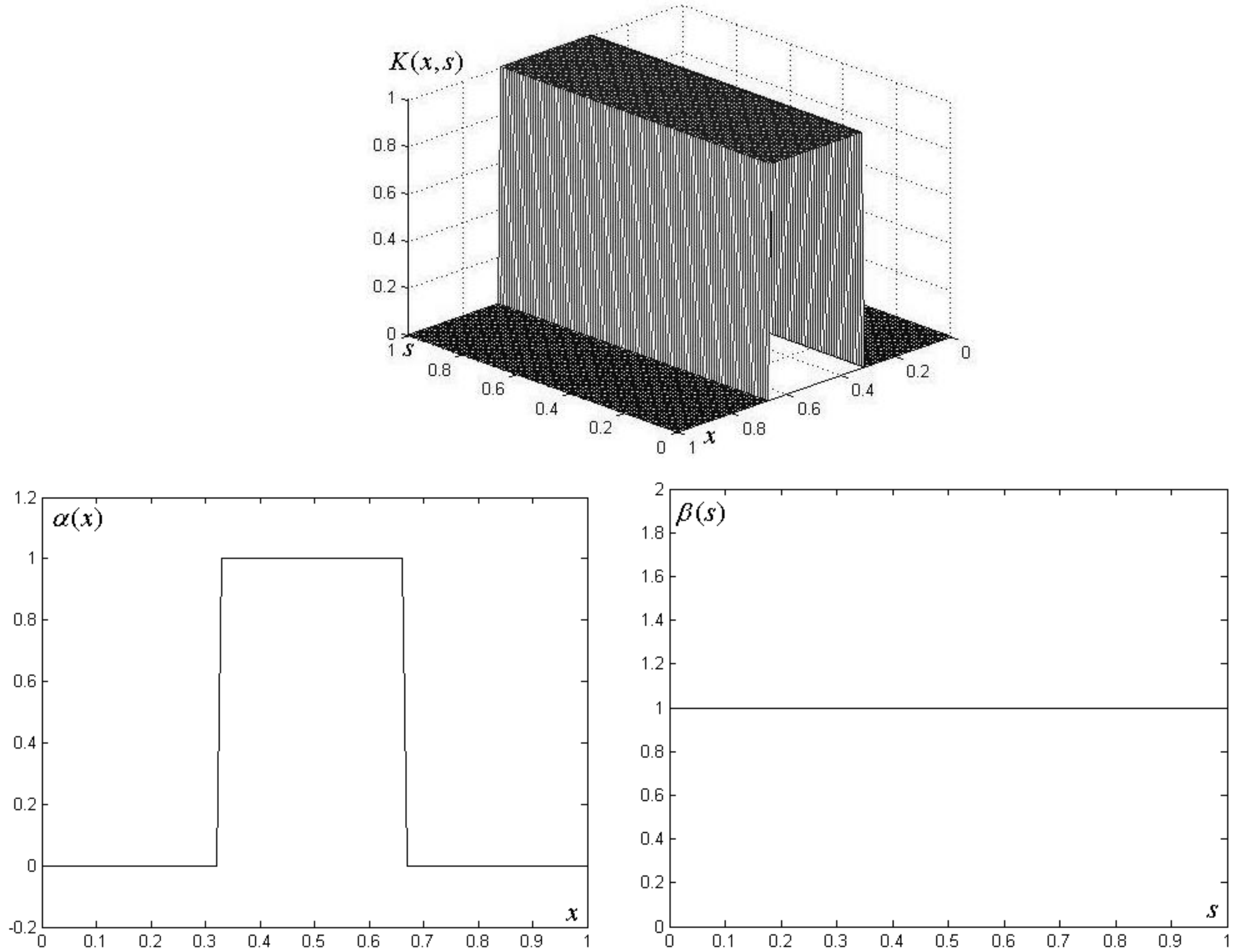

Рис. 2. Ілюстрації до прикладу.

Таким чином, обчислювальні експерименти дозволили продемонструвати працездатність запропонованих алгоритмів при наближенні складних тестових вихідних функцій. Висока точність результатів досягнута при отриманні економічних апроксимуючих виразів, які можуть бути використані для побудови відповідних програмних засобів.

У третьому розділі розглядаються задачі побудови алгоритмів розв'язання рівнянь типу Вольтерри на основі методу вироджених ядер. Дискретизація рівнянь виконується шляхом застосування відповідних квадратур з побудовою рекурентних обчислювальних схем, що вдається досягти завдяки змінній межі інтегрування, притаманній рівнянням даного класу.

Слід відзначити, що при використанні традиційного розрахункового виразу (квадратурний метод) час обчислення шуканої функції залежить від кількості кроків дискретизації, збільшення яких призводить до збільшення кількості обчислювальних операцій. Розрахунковий вираз, отриманий у випадку ядра, що розділяється, уникає цих труднощів. При застосуванні формули трапецій, алгоритм має вигляд при змінному кроці дискретизації (загальний випадок):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1),\ \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{f(x_2) + \frac{h_2}{2}\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x_2)\cdot\beta_l(x_1)\cdot\varphi(x_1)}{1 - \frac{h_2}{2}\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x_1)\cdot\beta_l(x_1)},$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{f(x_i) + \frac{h_2}{2}\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x_i)\beta_l(x_1)\varphi(x_1) + \sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x_i)\cdot\sum_{j=2}^{i-1}\frac{h_j + h_{j+1}}{2}\beta_l(x_j)\varphi(x_j)}{1 - \frac{h_i}{2}\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(x_i)\cdot\beta_l(x_i)}, \qquad (26)$$

де $i = 3,4,...,n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$.

Резольвентний метод. Загальною аналітичною формою розв’язання рівняння Вольтерри II роду є вираз

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,s)f(s)ds, \qquad (27)$$

де функція $R(x,s)$ є резольвентою (резольвентним або розв’язуючим ядром). Резольвента рівняння (27) визначається виразом

$$R(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,s), \qquad (28)$$

де $K_n(x,s)$ – ітеровані (повторні) ядра, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$K_1(x,s) = K(x,s),\ K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_n(t,s)dt,\ n = 1,2,3,... . \qquad (29)$$

Визначення резольвенти і чисельна або аналітична реалізація виразу (28) означає, по суті, операцію обернення оператора об'єкта, що моделюється, представленого лівою частиною рівняння (29). Крім того, такий підхід до пошуку розв’язку відкриває можливості отримання ряду нових чисельних алгоритмів моделювання, що реалізують явне подання оберненого оператора задачі.

Метод виродженої резольвенти. Для інтегрального рівняння $y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,s)f(s)ds$ введемо поняття виродженої резольвенти: $R(x,s) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}(s)$, тоді рівняння (29) матиме вигляд $y(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{i=1}^{m}\alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}(s)f(s)ds$ або $y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{Ri}(x)\int_0^x \beta_{Ri}(s)f(s)ds$.

Таким чином, в цьому випадку при розв’язанні інтегрального рівняння немає необхідності знаходити інтеграл від функції двох змінних, а лише інтеграл від функцій однієї змінної. При чисельній реалізації методу виродженої резольвенти маємо співвідношення $m << n$ (n- кількість алгебраїчних для методу квадратур), тобто маємо відповідне скорочення кількості операцій при задіянні методу виродженої резольвенти.

Для реалізації методу виродженої резольвенти пропонується наступний спосіб.

Будуємо резольвенту $R(x,s)$ за допомогою методу ітерованих ядер згідно з (29). Далі використовуємо метод апроксимації резольвенти у вигляді білінійного ряду і отримаємо резольвенту у вигляді $R(x,s)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}(s)$. Оскільки при цьому безпосередньо виконується співвідношення $m<<n$, то даний варіант методу виродженої резольвенти буде ефективним щодо використання пам'яті та комп'ютерного часу. Отримані висновки підтверджуються багатьма обчислювальними експериментами.

У розділі отримані ефективні алгоритми для розв'язання інтегральних рівнянь першого роду (задача відновлення сигналів), систем інтегральних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь вольтерівського типу.

У четвертому розділі на основі методу розщеплення ядер розглядаються питання розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма II і I роду, а також досліджуються нез'ясовані поки що можливості застосування даного підходу до нелінійних рівнянь фредгольмового типу і інтегро-диференціальних рівнянь з оператором Фредгольма. Тобто цей клас рівнянь об'єднується тим, що вони містять в собі інтегральні оператори з постійними межами інтегрування.

Лінійне інтегральне неоднорідне рівняння Фредгольма II роду

$$y(x)-\int_a^b K(x,s)y(s)ds=f(x),\ a\le x\le b,$$

з ядром $K(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s),\ m\ge 1,$ приймає вигляд $y(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)\right]y(s)ds=f(s),\ a\le x\le b.$ При цьому отримується наступне подання розв'язку рівняння: $y(x)=f(x)+C_i\alpha_i(x), a\le x\le b,$ де постійні C_i – невідомі. Задача розв'язання початкового рівняння зводиться до розв'язання алгебраїчної системи $C_i-\sum_{j=1}^{m}C_j\int_a^b\alpha_j(s)\beta_i(s)ds=\int_a^b\beta_i(s)f(s)ds$. Якщо ввести позначення $f_i=\int_a^b\beta_i(s)f(s)ds,\quad a_{ij}=\int_a^b\alpha_j(s)\beta_i(s)ds,\ i,j=\overline{1,m},$ то система рівнянь щодо C_i приймає вигляд $C_i-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}C_j=f_{i,}\ i=\overline{1,m},$

Таким чином, метод вироджених ядер дозволяє отримувати наближений розв'язок інтегрального рівняння шляхом розв'язання системи $m\times m$ алгебраїчних рівнянь замість прямого методу квадратур, згідно з яким розв'язується система $n\times n$

алгебраїчних рівнянь (n – кількість відрізків, дискритизуючих інтервал $[a,b]$). Значення m визначається методом апроксимації ядра, а мінімально можливе значення m визначає ефективність задіяного при цьому методу розщеплення.

Приклад. Розв'язується рівняння

$$y(x)=e^{-\pi}\left(\frac{\sin\pi x+x\cos\pi x}{1+x^2}\right)+e^{-x}-\frac{x}{1+x^2}+\int_0^{\pi}\sin xsy(s)\,ds,$$

(точний розв'язок e^{-x}) із застосуванням результатів апроксимації $K(x,s)=\sin xs$. Для порівняння наведемо результати розв'язку рівняння з кроком h = 0.01 на відрізку $[0,\pi]$ трьома методами: методом трапецій, методом вироджених ядер з базовою апроксимацією, методом вироджених ядер з градієнтною апроксимацією (таблиця 2).

Таблиця 2.

Порівняння результатів розв'язку рівняння прикладу

Метод	**Час отримання розв'язку (сек.)**	**Максимальна абсолютна помилка**
Квадратурний метод трапецій	**0.0482**	**0.0011**
Метод вироджених ядер з базовою апроксимацією	**0.0117**	**0.00072967**
Метод вироджених ядер з градієнтною апроксимацією	**0.0021**	**0.00072916**

Результати розв'язання прикладу, а також інші обчислювальні експерименти, ілюструють ефективність за точністю і витратами часу методу вироджених ядер. Базовий і градієнтний варіанти наближення ядра білінійним рядом дозволяють гнучко враховувати властивості вихідних ядер, створити можливості прискорення обчислювального процесу і мінімізувати кількість координатних функцій.

Програми, що реалізують розглянуті алгоритми, можуть бути включені в існуючі типові засоби комп'ютерного моделювання. Для розв'язання задач, що вимагають високої швидкості обчислень при розв'язуванні інтегральних рівнянь (обробка сигналів, управління, діагностика та ін.) етап апроксимації ядра є попереднім, що відповідає існуючим вбудованим технологіям комп'ютерної обробки сигналів у відповідних технічних системах.

Метод вироджених ядер може бути застосований до розв'язання систем інтегральних рівнянь, при цьому ефект застосування методу суттєво підвищується порівняно із скалярними рівняннями.

Задача розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма I роду $\int_a^b K(x,s)y(s)ds=f(\text{x}),\ a\le x\le b$ виконується із застосуванням одного із методів регуляризації. Для значної частини практичних задач регуляризація рівняння зводиться до отримання редуційованого рівняння II роду $\alpha\tilde{y}(x)-\int_a^b K(x,s)\tilde{y}(s)ds=f(\text{x}),\ a\le x\le b,$ де α – параметр регуляризації (постійна мала величина). Розв’язок $\tilde{y}(x)$ цього рівняння є близьким до $y(x)$, тобто є наближенням до $y(x)$ з допустимою похибкою. Застосування методу вироджених ядер до розв’язання рівнянь I роду зводиться до розв’язання коректної задачі II роду у вигляді $\alpha\tilde{y}(x) - \int_a^b (\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(x))\tilde{y}(s)ds = f(\mathrm{x}),\ a \le x \le b$.

Досліджена можливість застосування методу вироджених ядер для розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з ядрами довільного виду, якщо скористатися відповідним методом апроксимації ядер.

<u>Резольвентний метод</u>. Розв'язок рівняння Фредгольма II роду може бути представлено в аналітичній формі

$$y(x) = f(\mathrm{x}) + \int_a^b R(x,s) f(s)ds, a \le x \le b, \tag{30}$$

де функція $R(x,s)$ є резольвентою (резольвентою Фредгольма) рівняння (або його ядра $K(x,s)$).

Резольвента може бути знайдена за допомогою ітерованих ядер, сенс яких визначається поданням шуканого розв'язку у вигляді виразу

$$y(x) = f(\mathrm{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x), \tag{31}$$

який відповідає методу послідовних наближень при нескінченному числу ітераційних кроків і де функції $\varphi_n(x)$ визначаються за допомогою ітерованих ядер

$$K_n(x,s) = \int_a^b K_m(x,t)K_{n-m}(t,s)dt,\ n = 2,3,...,m < n.$$

Розв’язування інтегральних рівнянь за допомогою резольвенти є одним з ефективних методів дослідження багатьох задач з фізики, біології, техніки, тощо. Але складнощі цього підходу суттєво обмежують можливість його застосування, як в аналітичному, так і в числовому вигляді. У випадку виродженого ядра інтегрального рівняння ефективність реалізації методу значно підвищуються.

Якщо ядро вироджене, то розв’язок через резольвенту (31) набуває вигляду $\varphi_n(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i(x)\beta_i(s)\varphi_{n-1}ds$ і після певних перетворень ітероване ядро визначається виразом $K_n(x,s) = \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i^n(x)\beta_i^n(s) = \sum_{i=1}^{l_{n-1}}\sum_{j=1}^{l} \alpha_i^{n-1}(x)\beta_j(s)\int_a^b \beta_i^{n-1}(t)\alpha_j(t)dt$.

Таким чином резольвента $R(x,s)$, що визначається за допомогою ітерованих ядер, обчислюються у вигляді суми $R(x,s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i^n(x)\beta_i^n(s)$. Тобто, всі обчислення виконуються над функціями однієї змінної. Крім того, випливає принциповий висновок, що резольвента приймає вироджений вигляд, хоча кількість обчислювальних операцій є достатньо великою.

Так само, як і при розв'язанні рівнянь Вольтерри II роду, для отримання розв'язку рівнянь Фредгольма II роду доцільно використати поняття виродженої резольвенти $R(x,s) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}\,(s)$. Згідно з чим розв'язок рівняння (34) приймає вигляд $y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{Ri}(x)\int_{0}^{x} \beta_{Ri}(s) f(s)ds$ Отримання виродженої резольвенти за допомогою методу ітерованих ядер виконується наступним способом.

Будується резольвента $R(x,s)$ за допомогою ітерованих ядер. Далі використовується метод апроксимації резольвенти у вигляді білінійного ряду і отримується резольвента у вигляді $R(x,s) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{Ri}(x)\beta_{Ri}(s)$. Даний варіант методу виродженої резольвенти буде ефективним відносно використання пам'яті та комп'ютерного часу, що підтверджується обчислювальними експериментами.

Певні переваги методу вироджених ядер проявляються при нетрадиційній побудові чисельних алгоритмів розв'язання також нелінійних інтегральних рівнянь з постійними межами інтегрування. Досліджена можливість побудови відповідних алгоритмів аналізу точності обчислювальних процесів розв'язування інтегральних рівнянь.

Розділ п'ятий присвячений розробці комплексу програм для розв'язання наведених у роботі типів рівнянь, а також для виконання обчислювальних експериментів для апробації запропонованих алгоритмів, перевірки їх працездатності та ефективності. Комплекс програм включає супутні засоби для порівняння розроблених та існуючих алгоритмів. Програми створювались в системі MATLAB і забезпечують як самостійне використання, так і сумісне використання з вбудованими засобами системи. Комплекс дозволяє відпрацьовувати програми для використання як в середовищі MATLAB, так і для розробки засобів для зовнішнього застосування. Засоби комплексу забезпечили виконання всіх необхідних обчислювальних експериментів, а також розв'язання практичних задач.

Побудовано математичні моделі та розв'язано ряд прикладних задач за допомогою розробленого комплексу програм, зокрема, проведено дослідження коливань в'язкопружного циліндра із змінною внутрішньою межею, розв'язано задачу динамічної корекції системи вимірювання потоків теплового випромінювання.

ВИСНОВКИ

В роботі розв'язана актуальна науково-технічна задача розвитку методів та засобів математичного і комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів шляхом застосування і чисельної реалізації непараметричних моделей у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри і Фредгольма на основі алгоритмів удосконаленого методу вироджених (розщеплених) ядер.

1. Проведено аналіз стану проблеми створення сучасних технічних систем керування і спостереження, який засвідчив наявність нових вимог до методів і засобів моделювання динамічних процесів, таких як необхідність підвищення рівня універсальності математичних моделей, удосконалення алгоритмів моделювання, врахування обмежених комп'ютерних ресурсів та ін.; запропоновано підхід до вирішення даної проблеми шляхом застосування непараметричних динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри і Фредгольма, що забезпечує опис і стійке розв'язання основних класів задач динаміки технічних об'єктів; обрано метод вироджених ядер для реалізації інтегральних моделей, що забезпечує можливість отримання ефективних алгоритмів моделювання.

2. Запропоновано метод і алгоритми наближення ядер інтегральних рівнянь без попереднього вибору базового поліному (координатних функцій) ні по одній із змінних, що відповідає процесу апроксимації шляхом розщеплення; для реалізації методу розроблені три види алгоритмів: варіаційний, базовий ітераційно-варіаційний та градієнтний і досліджена збіжність методу; дослідження якості алгоритмів шляхом багатьох обчислювальних експериментів підтверджує високу ефективність процесів наближення.

3. Розроблено комп'ютерно-орієнтовані алгоритми наближення ядер інтегральних рівнянь у вигляді білінійних рядів (сум добутків функції однієї змінної) з мінімізацією кількості членів, що значно удосконалює метод вироджених ядер за рахунок зниження розмірності задач моделювання і зменшення кількості обчислювальних операцій.

4. Удосконалено алгоритми методу вироджених ядер для розв'язання рівнянь Вольтерри II роду, які мають суттєву перевагу за обсягом обчислювальних операцій по відношенню до традиційних алгоритмів прямого методу квадратур; розроблено алгоритми побудови резольвенти, що дозволяє забезпечити ефективність резольвентного методу розв'язування рівнянь даного класу; запропоновано спосіб перетворення лінійних і нелінійних рівнянь Вольтерри II роду до еквівалентного диференціального рівняння, що додає гнучкість у задачу вибору програмних засобів; розроблені рекурентні обчислювальні алгоритми розв'язання прямих і обернених задач динаміки, які мають високу швидкодію завдяки відсутності накопичення кількості операцій на кожному кроці дискретизації.

5. Застосовано вдосконалений метод вироджених ядер для розв'язання рівнянь типу Фредгольма, що дозволяє отримати обчислювальні алгоритми, складність яких значно нижча, ніж складність традиційних квадратурних алгоритмів; метод охоплює системи рівнянь II роду і регуляризовані рівняння I роду; отримана можливість застосування методу до інтегро-диференціальних рівнянь певного виду і спрощення ітераційних методів; запропоновано самостійний резольвентний метод розв'язання рівнянь даного класу; на основі методу розщеплення модифіковані традиційні підходи до розв'язання нелінійних і однорідних рівнянь в задачах визначення характеристичних чисел і власних функцій; для рівнянь Фредгольма II роду загального виду отримані алгоритми оперативного оцінювання точності обчислювального процесу; проведені обчислювальні експерименти дозволили порівнювати між собою результати використання класичного методу квадратур,

методу вироджених ядер та резольвентного методу (у двох варіантах), причому у всіх випадках визначилась певна перевага за ресурсними показниками запропонованих алгоритмів.

6. Розроблений комплекс програм, що дозволяє ефективно розв'язувати широкий клас задач моделювання динамічних об'єктів, які описуються основними типами інтегральних рівнянь, що підтверджується розв'язуванням численних тестових та низки практичних задач; створені методи та засоби можуть бути ефективно використані при проектуванні і дослідженні систем керування та спостереження; розроблені програми отримали впровадження в технічних розробках та навчальному процесі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Верлань Д. А. Ітераційні алгоритми апроксимації функції двох змінних / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2009. — Вип. 2. — С. 24—32. (Google Scholar)

2. Верлань Д.А. Алгоритми методу реалізації вироджених ядер при розв'язанні інтегральних рівнянь Вольтерри / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 64—69. (Google Scholar)

3. Верлань Д.А. Апроксимація функції двох змінних у задачах керування / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 62—70. (Google Scholar)

4. Верлань Д.А. Bilinear approximation of kernels of Volterra equation of the second kind / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2012. — Вип. 7. — С. 43—48. (Google Scholar)

5. Верлань Д.А. Оцінка похибок розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ-го роду засобами інтегральних нерівностей / Д. А. Верлань, К.С. Чевська // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський :

Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 23—33. (Google Scholar)

6. Верлань Д. А. Градиентный алгоритм билинейной аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений Фредгольма II-го рода / Д. А. Верлань // Электронное моделирование. – К., 2013. – Том 35.– № 1.– С. 73–80.

7. Верлань Д.А. Некоторые особенности численной реализации нелинейных интегральных моделей динамических объектов / Д.А. Верлань, С.Ю. Протасов // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 36—44. (Google Scholar)

8. Верлань Д. А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей / Д. А. Верлань // Электронное моделирование. – К., 2014. – Том 36.– № 3.– С. 41–57.

9. Верлань Д.А. Алгоритмы численной реализации нелинейных интегральных динамических моделей с повышенной точностью / Д.А. Верлань, В.А. Тихоход // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 20—28. (Google Scholar)

10. Verlan D. Three-input integral model of the recovery problem of antenna signals with interference / D. Verlan, N. Kostian. // Computational problems of electrical engineering. –Vol. 4, No. 2, 2014. — P. 89-94. (Google Scholar, Ulrich'sWeb, Index Copernicus.)

11. Федорчук В. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання / В. А. Федорчук, В. А. Іванюк, Д. А. Верлань. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – 144 с. – (Навчальний посібник).

12. Верлань Д.А. Способы формирования интегральных динамических моделей нелинейных систем регулирования / Д. А. Верлань, К.С. Чевська // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 24—36. (Google Scholar)

13. Верлань, Д. А. Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами/ Д. А. Верлань, В. В. Семенов, Л. М. Чабак // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 4. — С. 37-50. (Scopus)

14. Верлань А. Ф. Вариационно-итерационные алгоритмы получения разделяющихся ядер интегральных уравнений / А. Ф. Верлань, Д. А. Верлань, С. Н.

Максименко // Международная научно-практическая конференция “Инновация-2009”. Сборник научных статей / – Тошкент: Янги аср авлоди, 2009. – С. 250–251.

15. Верлань Д.А. Чисельні алгоритми апроксимацій функцій двох змінних / Д.А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г.Є.Пухова (м. Київ, 12-13 січня 2010 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2010. — С. 17.

16. Верлань Д.А. Алгоритмы решения интегральных уравнений Вольтерры I рода методом разделяющихся ядер / Д.А. Верлань // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the International Scientific Conference of Students and Young Scientists. — Kyiv: Bukrek, 2011. — С. 271-273.

17. Верлань Д. А. Обчислювальна реалізація методу вироджених ядер при розв’язанні інтегральних рівнянь Вольтерри / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г.Є.Пухова, 12-13 січня 2011, Київ / Д. А. Верлань. – К., 2011. – С. 13.

18. Верлань Д.А. Гладка апроксимація функції двох змінних білінійним рядом / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г.Є.Пухова (м. Київ, 15-16 січня 2012 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2012. — С. 15.

19. Верлань Д.А. Методи білінійної апроксимації ядер інтегральних рівнянь Вольтери 2-го роду / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г.Є.Пухова (м. Київ, 13-14 січня 2013 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2013. — С. 8.

20. Верлань Д. А. О решении интегро-дифференциальных уравнений с разделяющимися ядрами / Д. А. Верлань, А. М. Корнеев // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей VI міжнародної наукової конференції. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – С. 24–26.

21. Верлань Д. А. Алгоритми аналізу динаміки нелінійних об’єктів у вигляді інтегральних моделей з ядрами, що розділяються / Д. А. Верлань // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів". – Рівне: РВВ РДГУ, 2015. – С. 39.

АНОТАЦІЯ

Верлань Д. А. Методи та засоби чисельної реалізації інтегральних моделей динамічних об’єктів на основі розщеплення ядер. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, Київ, 2016.

Дисертація присвячена розвитку методів математичного і комп’ютерного моделювання динамічних об’єктів на основі непараметричних динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри та Фредгольма, їх чисельної реалізації шляхом створення і застосування ефективних алгоритмів розщеплення ядер.

У роботі вперше запропоновано і досліджено реалізацію методу розщеплення для апроксимації функцій двох змінних, який, на відміну від інших

(поліноміальних) методів, дозволяє отримати апроксимуючий білінійний ряд без попереднього вибору відомої системи координатних функцій, а саме шляхом поточкового визначення їх в процесі апроксимації, і реалізується за допомогою 3-х видів оптимізаційних алгоритмів – варіаційного, ітераційно-варіаційного та градієнтного; метод забезпечує високу економічність апроксимуючого виразу. Подальшого розвитку набув метод вироджених ядер для обчислення інтегральних операторів і розв'язання інтегральних рівнянь типу Фредгольма і Вольтери II і I роду, які забезпечують високу швидкодію процесу обчислень та створюють можливість отримання результатів у реальному часі. Вперше створені квадратурні алгоритми з використанням методу розщеплення ядер розв'язання лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри і Фредгольма II роду на основі обчислення і застосування резольвенти, що забезпечує отримання явних інтегральних моделей динамічних об'єктів, які подаються і реалізуються у вигляді сукупності числових масивів, зв'язаних між собою відповідними обчислювальними операціями.

Ключові слова: динамічні об'єкти, інтегральна модель, рівняння типу Вольтерри і Фредгольма, метод розщеплення, метод вироджених ядер, резольвента.

АННОТАЦИЯ

Верлань Д. А. Методы и средства численной реализации интегральных моделей динамических объектов на основе расщепления ядер. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена развитию методов математического и компьютерного моделирования динамических объектов на основе непараметрических динамических моделей в виде интегральных уравнений типа Вольтерры и Фредгольма, их численной реализации путем создания и применения эффективных алгоритмов расщепления ядер.

Интенсивное развитие компьютерных и компьютеризированных средств обработки информации в современных технических системах, таких как системы управления и наблюдения, выдвигает новые требования к методам и средствам математического моделирования динамических процессов в указанных системах, в том числе повышение уровня универсальности относительно классов динамических моделируемых объектов, расширение наборов алгоритмов моделирования, учета ограниченных ресурсов при реализации моделей. Анализ принципов построения основных классов приближенных (численных) методов решения интегральных уравнений - прямых (аппроксимационных) и итерационных позволяет сделать необходимым выбор для построения алгоритмов моделирования, а также получить оценки точности результатов, количества шагов дискретизации и количества итераций при заданной точности. Метод вырожденных ядер обладает

принципиальной возможностью повышения эффективности численных алгоритмов реализации интегральных динамических моделей при наличии продуктивного метода приближения ядер произвольного вида билинейные рядами, что подтверждает актуальность научно-технической задачи, которая решается в работе и обосновывает выбранный подход.

Метод вырожденных ядер, применен к уравнениям типа Фредгольма, позволяет получить вычислительные алгоритмы, сложность которых значительно ниже, чем сложность пропорциональных прямых квадратурных. Метод охватывает ряд уравнений, близкие к канонической форме уравнений Фредгольма второго рода. Для уравнений Фредгольма второго рода общего вида получены алгоритмы оперативной оценки точности вычислительного процесса, применены на использовании вычислительных схем с повышенной точностью выполнения операций. Алгоритмы создают возможности апостериорным текущего контроля точности процесса моделирования.

Наличие приближенных вырожденных ядер позволило модифицировать традиционные подходы к решению нелинейных и однородных уравнений. Алгоритмы решения нелинейных уравнений содержат в себе соответствующие вычислительные схемы реализации нелинейных зависимостей. Появляется возможность упростить в вычислительном смысле решения задач определения характеристических чисел и собственных функций.

В работе впервые предложено и исследовано реализацию метода расщепления для аппроксимации функций двух переменных, который, в отличие от других (полиномиальных) методов, позволяет получить аппроксимирующий билинейный ряд без предварительного выбора известной системы координатных функций, а именно путем точечного определения их в процессе аппроксимации и реализуется с помощью 3-х видов оптимизационных алгоритмов - вариационного, итерационно-вариационного и градиентного; метод обеспечивает высокую экономичность аппроксимирующего выражения. Дальнейшее развитие получил метод вырожденных ядер для вычисления интегральных операторов и решение интегральных уравнений типа Фредгольма и Вольтера II и I рода, обеспечивающих высокое быстродействие процесса вычислений и создающих возможность получения результатов в реальном времени. Впервые созданы квадратурные алгоритмы с использованием метода расщепления ядер решения линейных интегральных уравнений Вольтерры и Фредгольма второго рода на основе вычисления и применения резольвенты.

Проведенные вычислительные эксперименты позволили путем решения тестовых примеров сравнивать между собой результат использования ряда методов: классического метода квадратур, метода вырожденных ядер и резольвентного метода. Во всех случаях определилось определенное преимущество по ресурсным показателям алгоритмов для случаев применения вырожденных ядер.

Ключевые слова: динамические объекты, интегральная модель, уравнения типа Вольтерры и Фредгольма, метод расщепления, метод вырожденных ядер, резольвента.

ABSTRACT

Verlan D. A. Methods and tools for numerical implementation of integral models of dynamic objects based on kernel separation. – The manuscript.

Thesis for the degree of candidate of technical sciences, specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to development of mathematical and computer modeling of dynamic objects based on nonparametric dynamic models in the form of integral equations of Volterra and Fredholm, and to their numerical implementation through the design and application of efficient algorithms of kernel separation.

In the thesis, the implementation of method of kernel separation for approximating functions of two variables is proposed for the first time. The method, unlike other (polynomial) methods, allows to get approximating bilinear series without previously choosing known system of coordinate functions, namely by pointwise determination of the functions in the process of approximation. It is implemented with 3 types of optimization algorithms – variational, variational-iterative and gradient. The method is characterized by high efficiency of the resulting approximating expression. Method of degenerate kernels for calculating the integral operators and solving Fredholm and Volterra integral equations of the first and the second kind was further developed. The method provides high performance of the computing process and creates the possibility of obtaining results in real time.

First quadratic algorithms for solving Volterra and Fredholm linear integral equations of the first and the second kind that are based on computing and application of the resolvent used to derive explicit integral models of dynamic objects are designed. The algorithms are represented and implemented with a set of numerical arrays that are related to each other with corresponding computational operations.

Keywords: dynamic objects, integrated model equation of Volterra and Fredholm, separating method, the method of degenerate kernels, resolvent.